

II. Condensateur plan en régime alternatif.

1. Tout plan contenant Oz est un plan de symétrie des sources $\Rightarrow \vec{B}_1 \perp$ ce plan $\Rightarrow \vec{B}_1 = B_1 \cdot \vec{e}_\varphi$

Maxwell-Ampère: $\vec{J} = \vec{0}$ d'où $\text{rot } \vec{B}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}_0}{dt} = \vec{0}$.

On prend un circuit \mathcal{C} circulaire d'axe Oz et de rayon $\rho < R$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{r} = 2\pi\rho \cdot B_1 = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_{S/\mathcal{C}} \vec{E}_0 \cdot \vec{n} \, ds = \frac{\pi\rho^2}{c^2} \frac{dE_0}{dt}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\rho}{2c^2} \cdot \frac{dE_0}{dt} \cdot \vec{e}_\varphi = -\frac{\rho}{2c^2} E_m \omega \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$2. \quad \xi_m = \int_V \frac{B_1^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^R \frac{\rho^2}{4c^4} \left(\frac{dE_0}{dt} \right)^2 \frac{e \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho}{dV}$$

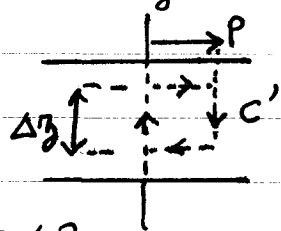
$$\text{avec } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1, \quad \xi_m = \frac{\epsilon_0 E_m^2}{2} \cdot \pi R^2 \cdot e \cdot \frac{R^2 \omega^2}{8c^2} \sin^2(\omega t)$$

$$\xi_e = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot V = \frac{\epsilon_0 E_m^2}{2} e \pi R^2 \cos^2 \omega t$$

3. Le rapport des contributions magnétique et électrique doivent s'apprécier en valeur moyenne au cours du temps, avec $\langle \sin^2 \omega t \rangle_t = \langle \cos^2 \omega t \rangle_t = \frac{1}{2}$

$$\text{Dans ces conditions } \frac{\langle \xi_m \rangle_t}{\langle \xi_e \rangle_t} = \frac{R^2 \omega^2}{8c^2}$$

4. Symétrie et invariance $\Rightarrow \vec{E}_2$ est selon Oz et il est indépendant de φ . On considère un circuit \mathcal{C} rectangulaire de côtés Δz et ρ :



$\rho < R$

$$\text{rot } \vec{E}_2 + \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{rot } \vec{E}_0 = \vec{0})$$

$$\iint_{S/\mathcal{C}} \text{rot } \vec{E}_2 \cdot \vec{n} \, ds + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}'} \vec{B}_1 \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

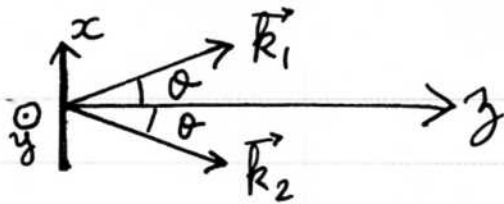
où $\vec{n} = \vec{e}_\varphi$

$$\oint_{\mathcal{C}'} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = [E_2(0) - E_2(\rho)] \Delta z$$

$$-\int_{S'} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \cdot \vec{n} \, ds = -\Delta z \int_0^{\rho} \frac{\rho'}{2c^2} \cdot \frac{d^2 E_0}{dt^2} \cdot d\rho' = -\frac{\rho^2}{4c^2} \frac{d^2 E_0}{dt^2} \cdot \Delta z$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2(\rho, t) = \vec{E}_2(0, t) + \frac{\rho^2}{4c^2} \frac{d^2 \vec{E}_0}{dt^2}$$

III. Ondes électromagnétiques



1.1. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 =$

$$E_m \vec{e}_y \left[\exp j \{ k(x \sin \theta + z \cos \theta) - \omega t \} + \exp j \{ k(-x \sin \theta + z \cos \theta) - \omega t \} \right] =$$

2. $E_m \vec{e}_y \cos(kx \sin \theta) \exp j(kz \cos \theta - \omega t)$

Amplitude fonction de $x \Rightarrow$ onde "non plane".

$$v_\phi = \frac{\omega}{k \cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta}$$

1.2. $\vec{B} = \frac{1}{j\omega} \text{rot} \vec{E} = \frac{2E_m}{c} \exp j(kz \cos \theta - \omega t) \times \dots$

$$\dots \left[-\cos \theta \cdot \cos(kx \sin \theta) \vec{e}_x + j \sin \theta \cdot \sin(kx \sin \theta) \vec{e}_z \right]$$

d'où $\vec{B} = \left\{ -\frac{2E_m}{c} \cos \theta \cos(kx \sin \theta) \cos(kz \cos \theta - \omega t) \vec{e}_x + \dots \right.$

$$\left. \frac{2E_m}{c} \sin \theta \cdot \sin(kx \sin \theta) \cos(kz \cos \theta - \omega t + \frac{\pi}{2}) \vec{e}_z \right\}$$

1.3. $\vec{R} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} E_y B_z \\ 0 \\ -E_y B_x \end{vmatrix}$ avec $\langle E_y B_z \rangle_t = 0$ et

$$\frac{\langle -E_y B_x \rangle_t}{\mu_0} = 2c \epsilon_0 E_m^2 \cos \theta \cdot \cos^2(kx \sin \theta) \text{ dans l'axe } \vec{e}_y.$$

1.4. Dans le plan xOy , $\|\vec{R}\|$ varie proportionnellement à $\cos^2(kx \sin \theta)$. L'éclairement est maximum si :

$$x_n = n \frac{\pi}{k \sin \theta} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}. \text{ Dans le plan } xOy.$$

ou bien tout plan qui lui est parallèle, le lieu est constitué de droites parallèles d'équations $x_n = x$.

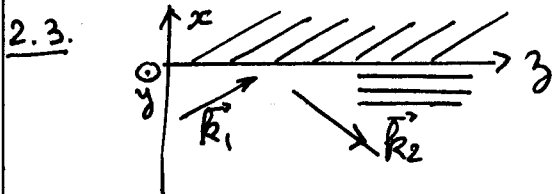
Le lieu des points d'éclairement nul est constitué de droites parallèles d'équations $x = x_m$ où $x_m = \frac{\pi}{k \sin \theta} (m + \frac{1}{2})$, $m \in \mathbb{Z}$.

2.1. Pour un point M situé dans le conducteur: $\vec{E}(M) + \vec{E}_1(M) = \vec{0}$ où $\vec{E}_1(M)$ est produit par la répartition superficielle de charges et de courants. De même pour $\vec{B}(M) + \vec{B}_1(M) = \vec{0}$. Le plan yOz est un plan de symétrie de la distribution de charges et de courants qu'il contient! donc le champ électrique \vec{E}_1 aura un symétrique par rapport à yOz , noté $\vec{E}_r(M') = \vec{E}_1(M) = -\vec{E}(M)$ où M' est le symétrique de M par rapport à yOz .

Comme \vec{B} est un pseudo-vecteur, le même raisonnement conduit à $\vec{B}_r(M') = -\vec{B}_1(M) = \vec{B}(M)$.

III. 2.1. suite. L'onde réfléchie est donc une onde plane, de vecteur \vec{k}_2 symétrique de \vec{k}_1 par rapport au plan yOz avec $k_2 = k_1$. Le champ électrique est déphasé de π par rapport au champ \vec{E} incident en $x=0$.

2.2. Le champ total $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}_r$ sera donc nul à l'interface {conducteur - vide} définie par $x=0$. En prenant l'interface comme origine, on peut écrire : $\vec{E}' = E_m \vec{e}_y [\exp j(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t) - \exp j(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)]$
 $= 2j E_m \vec{e}_y \sin(kx \sin \theta) \cdot \exp j(kz \cos \theta - \omega t)$
 ce résultat est comparable au cas 1.1. au déphasage près ($\sin(kx \sin \theta)$ au lieu de $\cos(kx \sin \theta)$) et $j = e^{j\pi/2}$.



L'amplitude est maximale si $\sin(kx \sin \theta) = \pm 1$
 soit $x_n \stackrel{\textcircled{1}}{=} (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{k \sin \theta}$

Le champ est nul si :

$\sin(kx \sin \theta) = 0 \Rightarrow x_m \stackrel{\textcircled{2}}{=} m \frac{\pi}{k \sin \theta}$, où m est un entier négatif, ainsi que n .

Les équations $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ sont celles de plans parallèles à yOz et leurs intersections avec le plan xOz sont donc des droites.

